

السلامة

جبر خطی عددی

مؤلف: علی محمد نظری

ویراسته: بهنام سپهریان

سرشناسه:	: نظری، علی محمد، ۱۳۴۵ شهریور - Nazari, Ali Mohammad
عنوان و نام پدیدآور	: جبر خطی عددی / مولف علی محمد نظری؛ ویراسته بهنام سپهریان.
وضعیت ویراست	: [ویراست ۲]
مشخصات نشر	: اراک: دانشگاه اراک، انتشارات، ۱۴۰۲.
مشخصات ظاهری	: خ، ۳۰۹ ص. : نمودار.
شابک	: ۹۷۸-۶۲۲-۸۱۵۴-۰۵-۳ ریال ۳۵۰۰۰۰
وضعیت فهرست نویسی	: فیبا
یادداشت	: چاپ دوم.
یادداشت	: کتابنامه.
یادداشت	: نمایه.
موضوع	: جبر خطی -- راهنمای آموزشی (عالی) Algebras, Linear -- Study and teaching (Higher) جبر خطی -- مسائل، تمرین‌ها و غیره (عالی) Algebras, Linear -- Problems, exercises, etc. (Higher) ماتریس‌ها -- راهنمای آموزشی (عالی) Matrices -- Study and teaching (Higher) ماتریس‌ها -- مسائل، تمرین‌ها و غیره (عالی) Matrices -- Problems, exercises, etc. (Higher)
شناسه افزوده	: دانشگاه اراک. انتشارات
رده بندی کنگره	: QA۱۸۴
رده بندی دیویی	: ۵۱۲/۵
شماره کتابشناسی ملی	: ۹۴۳۷۰۷۰
اطلاعات رکورد کتابشناسی	: فیبا

جبر خطی عددی

(چاپ دوم - ویراست دوم)

دکتر علی محمد نظری

ناشر	: دانشگاه اراک
شمارگان	: ۲۰۰
نوبت چاپ	: دوم - ۱۴۰۲
شابک	: ۹۷۸-۶۲۲-۸۱۵۴-۰۵-۳
قیمت	: ۳۵۰۰۰۰ تومان

حق چاپ برای ناشر محفوظ است

پیشگفتار

الهی در این دیار تنهایی تو را دارم و تو بودی و هستی و خواهی بود دستگیرم. درود و سلام خدا بر جمله پیامبران الهی و مهتر آنان حضرت خاتم النبیین و اصحاب و یارانش و درود و برکات خدا بر ائمه هدی و منت خدای رحمان را که دست تقدیر سرنوشت مرا از تدریس در کلاس درس دانشگاه اراک به شاگردی در پشت میزهای دانشگاه دولتی مسکو رساند و توفیقی خدا نصیب کرد که چهارسال و سه ماهی را شاگرد ریاضیدان تاجیک الاصل روس آقای حکیم داداجانویچ ایکراموف^۱ بوده و چون رشته ایشان جبر خطی بود به جبر خطی روی آورم. او فارسی می دانست و صحبت نکرد تا شاگردش زبان روسی بیاموزد. ایران را می شناخت و دوست داشت و با فرهنگ و آیین ایران زمین آشنایی کامل داشت و اخبار و رویدادهای کشورمان را پیگیری می کرد. راستش رفته بودم تا رشته دیگری بخوانم، یعنی بیشتر دنبال بهینه سازی بودم، اما با همکاری ایوان پتروویچ^۲ استاد دوره زبان تخصصی ام با آقای ایکراموف آشنا شدم و شد آنچه باید بشود و از این بابت خدا را بارها شکر کرده ام.

دیوید هیلبرت^۳ ریاضیدان بزرگ قرن بیستم می گوید «ابزاری که به عنوان واسطه بین نظریه و عمل، بین فکر و مشاهده عمل می کند، ریاضیات است. این ریاضیات است که پل های پیوند دهنده را ایجاد می کند و اشکال معتبرتری را ارائه می دهد. از این رو به وجود آمده است که کل فرهنگ معاصر ما، به همان اندازه که مبتنی بر نفوذ فکری و بهره برداری از طبیعت باشد، پایه های خود را در ریاضیات بنا کند». او در جای دیگری در باره ریاضیات می گوید: «یکی از خصوصیات ذاتی ریاضیات این است که هر پیشرفت واقعی با کشف و توسعه روش های جدید و ساده سازی روش های قبلی همراه است ... ویژگی یک پارچه ریاضیات در ذات خودش نهفته است. در واقع، ریاضیات پایه و اساس تمام علوم طبیعی است». مردی چنین سرشار از فرهیختگی در عالم ریاضی کم زاده شده است. کارهای جبر خطی این ریاضیدان بزرگ حاوی نکات بسیار ارزنده ای است.

چند سالی است که درس جبر خطی عددی به دروس اصلی رشته ریاضیات و کاربردها اضافه شده است و نگارنده بر آن شد تا برای دوره کارشناسی مطالبی را که در این چند سال از مقالات و کتاب های مختلف جمع آوری کرده است و یا خودش بعضی از آنها را بدست آورده، در قالب کتابی به رشته تحریر درآورد. نوشتن سخت است و مسئولیت آفرین و در نتیجه خیال نوشتن و

¹Khakim Dadanjanovich Ikramov

²Ivan Petrovich

³David Hilbert

تعهد بعد از آن چون هولی بر پنجره ذهن مشت می‌کوبد. کتاب ارزشمند نویسنده هندی الاصل مقیم ایالات متحده جناب بیسوا داتا^۱ توسط استاد ارجمند خانم دکتر توتونیان ترجمه گردیده و نگارنده از آن بهره‌وفی برده است. الگوریتم‌های عددی که در این کتاب با روانی هرچه تمامتر نوشته شده باعث استفاده بیش از اندازه کتاب با استفاده از کامپیوتر گردیده است. احساس می‌کنم که داتا برای نوشتن این کتاب بیش از ۱۰۰۰ مقاله را مورد بررسی قرار داده است. کتاب ایشان دارد قدیمی می‌شود و نوشته جدیدی به آن روانی سالهاست که منتظران را بیشتر منتظر کرده است. شاید خورده‌ای که می‌توان به کتاب داتا گرفت این باشد که بعضی از مثال‌هایش با دست قابل انجام نیستند و برای یک کتاب آموزشی جبرخطی عددی زینده آن است که دانشجو بتواند با دست مثال‌ها را بدست آورد تا بر مفاهیم تسلط یابد. سعی بر این شده است که حتی المقدور مثال‌ها دارای چنین مشخصه‌ای باشند. کتاب آنالیز عددی ۲ از انتشارات پیام نور نوشته آقای دکتر محمد باقر احمدی نیز مورد توجه اینجانب بوده است و آن را بارها در پیام نور تدریس کرده‌ام. دو کتاب نظریه ماتریس‌های فوژن ژانگ^۲ و آنالیز عددی ماتریسی نوشته ایپسن^۳ مورد استفاده‌ام بوده‌اند. اینجا ما سعی بیشتر در بیان روش‌ها داشته‌ایم تا بخواهیم خود را درگیر الگوریتم‌ها نماییم، اما وقتی روش‌ها را مطرح کرده‌ایم سعی نموده‌ایم بیشتر در مورد روش کار بحث کنیم تا بتوانیم تعداد عملیات‌های آن روش را محاسبه نماییم. در هر فصل بنا به سنت همه کتاب‌های آموزشی چند تمرین مطرح شده است. حل تعدادی از مسائل را در انتهای کتاب به عنوان ضمیمه آورده‌ایم تا دانشجو با آمادگی بیشتری به حل سایر مسائل بپردازد.

این کتاب در شش فصل گردآوری شده است. در فصل اول مقدمه و مطالب مقدماتی آورده شده است که یک دانشجو باید در مورد جبرخطی به یاد داشته باشد. البته فرض را بر این قرار داده‌ایم که دانشجو درس مبانی ماتریس‌ها و جبرخطی را گذرانده است و با مفاهیم ماتریس‌ها و مقادیر ویژه بیگانه نمی‌باشد. به علت کاربرد بسیار وسیع ماتریس‌های معین مثبت و زیبایی آن‌ها یک بخش جداگانه در این فصل به آن‌ها اختصاص داده شده است. اگرچه می‌شد خیلی از این خواص را به عنوان تمرین به دانشجو واگذار کرد، اما نگرانی از آن که دانشجویان کمتر به حل آن‌ها بپردازند، مرا بر آن داشت تا بیشتر خواص این ماتریس‌ها را با اثبات بیاورم.

فصل دوم را به حل دستگاه معادلات خطی اختصاص داده‌ایم و تقریباً روش‌های معروف را جمع کرده‌ایم که با سرفصل شورای عالی برنامه ریزی انطباق دارد. هم روش‌های کلاسیک مثل حذفی گاوس آورده شده و هم تعدادی از روش‌های تکراری را مطرح کرده‌ایم. منتها در ابتدای فصل دوم مقدمه‌ای بر نمایش اعداد در کامپیوتر آورده شده است که بیشتر از کتاب داتا است. هر چه باشد کتاب از دید عددی قرار است به جبرخطی بپردازد، به همین منظور سعی شده است در بخش اول فصل دوم به این مهم پرداخته شود. اختراع کامپیوترهای کوانتومی که در حین نوشتن آخرین صفحات این کتاب رخ داد و چنین سرعت شگفت‌آوری که کار ۱۰ هزار سال محاسبه را به سه دقیقه و اندی کاهش داده امیدی در دل‌ها را زنده می‌کند که مسائلی که قبلاً هیچ کامپیوتری توان حل آن را نداشت، حالا قابل حل شده‌اند و این یعنی تغییراتی شگرف در آنالیز عددی و

¹Biswa Nath Datta

²Fuzhen Zhang

³Ipsen

جبرخطی عددی که باید در فاصله نه‌چندان دور شاهد بروز کتاب‌هایی در این زمینه باشیم. در فصل سوم به ماتریس‌های جالب و متعامد هوس هولدر^۱ و گیونز^۲ پرداخته‌ایم که کار این ریاضیدان اهل ایالات متحده کمک بسیار زیادی را به جبرخطی عددی کرده است. آنقدر کار این دو اهمیت دارد تا نگارنده را بر آن داشت تا فصلی مجزا با توضیح و تفسیر بیشتر به آنان اختصاص دهد. این دو تقریباً با چند سال اختلاف در اوایل قرن بیستم بدنیا آمدند و در اواخر قرن بیستم با اختلافی کم از دنیا رفتند، اما یادگار آنان جبرخطی عددی را وسعت بخشید.

فصل چهارم را به پیدا کردن عددی مقادیر ویژه اختصاص داده‌ایم و البته یافتن مقادیر ویژه از مسائلی است که سال‌هاست بزرگان علم جبرخطی را به خود مشغول کرده است. هنوز که هنوز است روش شش‌دانگی که بتواند خیال ما را در بدست آوردن عددی مقادیر ویژه آسوده کند بدست نیامده و بعید است که بدست آید.

در فصل پنجم به قضیه تجزیه مقدار تکین پرداخته‌ایم و این قضیه بسیار مهم را مطرح و مقداری از کاربردهای این قضیه را مطرح کرده‌ایم. نگارنده در دوره دکتری خویش بسیار از این قضیه استفاده کرده است.

فصل ششم فصل اختصاصی کارهای جدید نگارنده است. مساله مقدار ویژه معکوس ماتریس‌های نامنفی و کاربرد آنان سال‌هاست مورد توجه ریاضیدانان جبرخطی عددی قرار گرفته است و کاربرد آنان در فرآیندهای تصادفی بر کسی پوشیده نیست. مقالات متعددی نگارنده در این باره نوشته است و خواستم برای آشنایی دانشجویان کارشناسی با گوشه‌ای از مطالب جدید و استفاده احتمالی دانشجویان کارشناسی ارشد، خلاصه‌ای از کارهای دیگران و خویش را در این فصل را اضافه کنم. مساله‌ای با صورت بسیار ساده و جواب بسیار پیچیده که فقط تا بعد پنج مورد بررسی قرار گرفته است. امید دارم که با همت بلند ریاضیدانان و مخصوصاً تعداد زیادی از هموطنان گرانقدرم که در این وادی سعی بسیار نموده‌اند، گره از کار فروبسته این مساله نیز گشوده گردد. می‌توان این بخش را برای دوره کارشناسی بصورت اختیاری در نظر گرفت.

تعدادی از برنامه‌های کامپیوتری لازم به زبان‌های Maple و Matlab را بنا به سفارش داور محترم این کتاب در بخش ضمیمه با توضیحات لازم آورده‌ام تا دانشجویان یاد بگیرند که الگوریتم‌های این کتاب را روی کامپیوترهای خویش پیاده نمایند و از زیبایی‌های جبرخطی و ترکیب آن با کامپیوتر لذت ببرند.

از جناب آقای دکتر بهنام سپهریان همکار ارجمند گروه ریاضی دانشگاه اراک که با صبر و حوصله فراوان و پراستاری این کار را به انجام رساندند و نکات ارزشمندی را گوشزد کردند سپاسگزاری می‌نمایم. از سرکار خانم عطیه نظامی که در رسم شکل‌ها کمک کرده و بازخوانی متن نهایی را عهده‌دار شدند و در نوشتن تعدادی از برنامه‌های کامپیوتری مطالب جالبی را گوشزد نمودند، قدرانی کرده و از انتشارات دانشگاه اراک که در چاپ این کتاب اینجانب را یاری نمودند تشکر فراوان می‌نمایم.

در حین نوشتن این کتاب هر جا نکته‌ای از یک مقاله یا کتابی می‌دیدم آن را یادداشت کردم یا در قالب نکته و یا در قالب تمرین آن را آوردم. این نوشته اگرچه اولین کار نگارنده نمی‌باشد،

¹Householder

²Givens

اما بطور قطع بی‌اشکال نمی‌باشد از اساتید ارجمند و دانشجویان گرانقدر که از این نوشته استفاده می‌کنند درخواست دارم که بر اینجانب منت گذاشته و اشکالات را از طریق ایمیل زیر گوشزد نمایند تا اگر عمری بود و کتاب به چاپ‌های بعدی رسید، اصلاح گردد.

بهار ۱۴۰۰ علی محمد نظری <a-nazari@araku.ac.ir>

پیش‌گفتار ویرایش دوم

خداوند بزرگ را صدهزار بار شکر می‌کنم که این کتاب به‌دست دانشجویان و همکارانم رسید و در این زمان که کتاب در دست علاقمندان بود و نکات جالبی را گوشزد می‌کردند، به این فکر افتادم که ویرایشی جدید از کتاب را در دسترس علاقمندان قرار دهم. در این یک‌ساله تعداد دیگری از مقالاتم در باب مقادیر ویژه ماتریس‌های نامنفی به‌چاپ رسیده بودند و وقتی به فصل ششم مراجعه کردم جای خالی مساله مقدار ویژه معکوس ماتریس‌های سه‌قطری را احساس می‌کردم، پس در این فصل بطور خلاصه بخشی از مساله مقدار ویژه معکوس ماتریس‌های سه‌قطری متقارن را اضافه نمودم. همچنین تعداد قابل توجهی تمرین دیگر در مورد مقدار ویژه معکوس به این فصل اضافه شد تا دانشجوی علاقمند برای فراگیری بیشتر با آن‌ها دست و پنجه نرم کند تا بیشتر و بهتر به موضوع مسلط گردد. از طرف دیگر در مساله کاربرد مقادیر تکین نیز بخشی را به‌عنوان فاصله یک ماتریس تا مجموعه ماتریس‌های دارای دو مقدار ویژه دلخواه را اضافه نمودم تا قضیه بسیار مهم اکارت-یانگ ابتر نماند و کاربرد دیگری از قضیه تجزیه مقدار تکین اضافه گردد. این فصل می‌تواند راه‌گشای خوبی برای کسانی باشد که نیت دارند کارشناسی ارشد را به‌رشته آنالیز عددی گرایش جبرخطی عددی بیابند. در این بخش نیز که کارهای سال‌های دور و نزدیک اینجانب بوده آنقدر برایم جذابیت داشت که نتوانستم آن را اضافه نکنم. به‌ویژه اگر ماتریس داده شده یک ماتریس نرمال باشد، هم کار از نظر تئوری جذاب می‌گردد و هم از نظر عدد حالت جالبی پیدا می‌کند. حالا هم از نظر تعداد صفحه نوشته شده از مقالات، و هم از نظر تعداد مراجع مورد استفاده آنقدر مطالب نوشته شده از کارهای خودم زیاد شد که ترجیح دادم تالیف را به‌تصنیف تغییر دهم. امیدوارم مورد استفاده دانشجویان و همکاران ارجمند سرزمینم قرار گیرد. باز اگر نکته‌ای مشاهده نمودید که از دستم در رفته یا فراموش نموده‌ام، منت نهاده با ایمیل نوشته شده فوق ارشاد فرمایید. دستبوس همه بزرگواران هستم.

تابستان ۱۴۰۱ علی محمد نظری

فهرست مطالب

پیشگفتار

پ

۱	مقدمات جبر خطی	۱
۱	مطالبی که یاد خواهیم گرفت	۱.۱
۲	مقدمه‌ای بر ماتریس‌ها	۲.۱
۱۰	خواص ماتریس معین مثبت	۳.۱
۱۶	بعضی خواص دیگر ماتریس‌ها	۴.۱
۲۴	نرم برداری و ماتریسی	۵.۱
۲۵	چند نرم برداری ساده	۶.۱
۲۶	هم ارزی نرم‌های برداری	۷.۱
۲۷	فرآیند متعامد سازی گرام اشمیت	۸.۱
۲۹	نرم ماتریسی	۹.۱
۳۷	ماتریس‌های همگرا و همگرایی ماتریسی	۱۰.۱
۳۹	همگرایی سری‌های ماتریسی	۱۱.۱
۵۱	حل دستگاه‌های معادلات خطی	۲
۵۱	نمایش اعداد در کامپیوتر	۱.۲
۵۵	حل دستگاه معادلات خطی مثلثی	۲.۲
۵۶	حل دستگاه به روش حذفی گاوس	۳.۲
۵۹	۱.۳.۲ پایداری در روش حذفی گاوس	۱.۳.۲
۶۰	محوری گیری	۴.۲
۶۱	۱.۴.۲ روش محوری گیری جزئی	۱.۴.۲
۶۲	۲.۴.۲ محوری گیری کلی	۲.۴.۲
۶۵	روش حذفی گاوس روی ماتریس‌های سه قطری:	۵.۲
۶۷	دستگاه‌های هسنبرگی	۶.۲
۶۹	پیدا کردن وارون یک ماتریس	۷.۲
۷۱	عدد وضعیت یک ماتریس	۸.۲

۷۳	بدوضعی مقادیر ویژه	۱.۸.۲
۷۴	یک دستگاه بدوضع	۲.۸.۲
۷۷	اختلال در حل دستگاه‌های معادلات خطی	۹.۲
۷۷	اختلال در بردار سمت راست	۱.۹.۲
۷۹	اختلال در ماتریس ضرایب	۲.۹.۲
۸۱	تجزیه‌های یک ماتریس	۱۰.۲
۸۱	تجزیه LU به روش دولیتل:	۱.۱۰.۲
۸۲	تجزیه LU به روش کروت	۲.۱۰.۲
۸۵	تجزیه LU با استفاده از محوری گیری	۳.۱۰.۲
۸۸	تجزیه چولسکی	۴.۱۰.۲
۹۰	تجزیه تثولیتز	۱۱.۲
۹۱	تجزیه قطبی	۱۲.۲
۹۳	روش تصفیه تکراری برای حل دستگاه معادله‌ی خطی	۱۳.۲
۹۵	روش‌های تکراری برای حل دستگاه‌های معادلات خطی	۱۴.۲
۹۶	روش ژاکوبی	۱.۱۴.۲
۹۹	روش گاوس-سایدل	۲.۱۴.۲
۱۰۶	روش SOR	۳.۱۴.۲
۱۱۵	۳ ماتریس‌های هوس هولدر و گیونز	
۱۱۵	ماتریس هوس هولدر	۱.۳
۱۲۰	ماتریس‌های گیونز	۲.۳
۱۲۵	تجزیه QR با استفاده از ماتریس‌های گیونز و هوس هولدر	۳.۳
۱۳۷	۴ محاسبه عددی مقادیر ویژه	
۱۳۷	مقدمه	۱.۴
۱۵۴	قضایای گرشگورین در مورد موقعیت مقادیر ویژه	۲.۴
۱۵۷	تعیین چند جمله‌ای مشخصه برای یک ماتریس	۳.۴
۱۵۸	روش کرایلف	۱.۳.۴
۱۶۰	روش لورییر	۲.۳.۴
۱۶۲	روش ضرایب نامعین	۳.۳.۴
۱۶۴	روش‌های تکراری برای پیدا کردن مقادیر ویژه	۴.۴
۱۶۶	سرعت بخشیدن به روش توانی	۵.۴
۱۶۸	روش توانی معکوس	۱.۵.۴
۱۷۰	پیدا کردن سایر مقادیر ویژه	۲.۵.۴
۱۷۲	بزرگترین مقدار ویژه تکراری و مختلط	۶.۴
۱۷۵	کاربرد تجزیه QR در یافتن مقادیر ویژه	۷.۴

۱۸۵	۵ تجزیه مقدار تکین
۱۹۱	۱.۵ کاربرد تجزیه مقدار تکین در فاصله ماتریس‌ها
۱۹۸	۲.۵ فاصله یک ماتریس از مجموعه ماتریس‌های دارای دو مقدار ویژه تکراری
۲۰۷	۱.۲.۵ ساخت ماتریس کمینه اختلال
۲۰۹	۲.۲.۵ حالت ماتریس نرمال
۲۱۴	۳.۲.۵ جنبه‌های عددی حالت نرمال
۲۱۸	۳.۵ مساله حداقل مربعات و وارون تعمیم یافته
۲۲۲	۴.۵ محاسبه وارون تعمیم یافته
۲۳۱	۶ مساله مقدار ویژه معکوس ماتریس‌های نامنفی
۲۳۱	۱.۶ تاریخچه و مقدمه
۲۴۰	۲.۶ شرایط لازم برای حل پذیری مساله
۲۴۳	۳.۶ حالت متقارن
۲۴۴	۴.۶ حل مساله مقدار ویژه معکوس به روش ترکیبی
۲۵۳	۵.۶ حل مساله مقدار ویژه معکوس با استفاده از ماتریس پایین مثلثی واحد
۲۵۴	۱.۵.۶ طیف داده شده با تعداد مقادیر ویژه مثبت کمتر یا مساوی با مقادیر ویژه منفی
۲۷۱	۷ راهنمایی تعدادی از تمرینات
۲۷۱	۱.۷ تمرینات فصل اول
۲۷۵	۲.۷ تمرینات فصل دوم
۲۷۹	۳.۷ تمرینات فصل سوم
۲۸۳	۴.۷ تمرینات فصل چهارم
۲۸۷	۵.۷ تمرینات فصل پنجم
۲۹۱	پیوست-برنامه‌های کامپیوتری
۳۰۸	نمایه

فهرست تصاویر

۱۱۷	نمودار ۱.۱.۳
۱۵۶	نمودار ۱.۲.۴
۱۵۶	نمودار ۲.۲.۴
۲۳۲	۱.۱.۶
۲۳۳	۲.۱.۶
۲۳۶	۳.۱.۶